数理解析研究所講究録
第1553巻 2007年 132-136

双曲型リーマン面上の有界調和関数の族と有限なディリクレ積分をもつ調和関数の族

京都産業大学・理学部 正岡弘照 (Hiroaki Masaoka)
Department of Mathematics, Faculty of Science
Kyoto Sangyo University

§1. 導入

リーマン面Rに対して, $HP(R), HB(R), HD(R)$ をそれぞれ, R上の非負値調和関数の差の族, R上の有界調和関数の族, R上の有限なディリクレ積分をもつ調和関数の族とする. また, $HP_+(R), HB_+(R), HD_+(R)$ をそれぞれ, R上の非負値調和関数の族, R上の有界な非負値調和関数の族, R上の有限なディリクレ積分をもつ非負値調和関数の族とする. このとき, $HX(R) = HX_+(R) - HX_+(R)$, $X = P, B, D$ がなりたつ. もし, Rが放物型であるなら, $HX(R) = \mathbb{R}$, $X = P, B, D$ がなりたつことが知られている (cf. [5]). $MHB_+(R)$ を $HB_+(R)$ の R 上の単調非減少収束列の極限関数の族とする. $HD_+(R) \subset MHB_+(R)$ が なりたつことが知られている (cf. [2, Theorem 4.1]).

以下では, R は 双曲型であると仮定する. ここで, Rが 双曲型であるとは, R上にグリーン関数が存在することを意味するものとする. R のマルチン境界および R のミニマルなマルチン境界をそれぞれ, $\Delta^M = \Delta^{R,M}$ および $\Delta_1^M = \Delta_1^{R,M}$ とします. 第49回函数論シンポジウム (平成18年9月14日–平成18年9月16日, 東京工業大学で開催) で,

$$\boxed{\begin{aligned} HP(R) = HB(R) &\Leftrightarrow \dim HP(R) = \dim HB(R) < +\infty \\ HP(R) = HD(R) &\Leftrightarrow \dim HP(R) = \dim HD(R) < +\infty \end{aligned}}$$

が なりたつことをお話した (ここで, $\dim HP(R)$ は ベクトル空間 $HP(R)$ の次元を表す). よって, 次に $HB(R) = HD(R)$ が いつなりたつか問題になる. この講演の目的は この問題に対して, 1つの解答を与えることである.

> **定理.** R は 双曲型であると仮定する. このとき, 次は同値である.
>
> (i) $HB(R) = HD(R)$;
>
> (ii) 適当な調和測度に関する零集合 $N(\subset \Delta_1^M)$ がとれて, $\Delta_1^M \setminus N$ が有限集合であり, すべての $\zeta \in N$ に対して, ζ に極をもつマルチン関数が $HB(R) \cap HD(R)$ に属する;
>
> (iii) $\dim HB(R) = \dim HD(R) < +\infty$.

§2. 定理の証明

(i) が なりたつと仮定する. Γ を R のロイデンのコンパクト化 $R^{*,R}$ の調和境界であるとする (ロイデンのコンパクト化についての詳細は [1] を参照のこと). 各 Γ の成分 Γ' の Γ 上の調和測度 $\omega_z^R(\Gamma_n)$ は 正であることを注意すると, Γ の成分の集合は可算集合になる. $\{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ を Γ の成分の集合とする. このとき, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\sharp\Gamma_n = 1$ を示そう ($\sharp\Gamma_n$ は Γ_n のカーディナル数を表す). $\sharp\Gamma_n \geq 2$ であると仮定する. $R^{*,R}$ が コンパクトハウスドルフ空間であるので, Γ_n の開部分集合 Γ'_n がとれて, $Cl(\Gamma'_n) \neq \Gamma_n$ ($Cl(\Gamma'_n)$ は $R^{*,R}$上の Γ'_n の閉包である) をみたす. $h(z) = \omega_z^R(\Gamma'_n)$ とおく.

$$h(z) \wedge (1 - h(z)) = \int \min(\chi_{\Gamma'_n}, 1 - \chi_{\Gamma'_n})(\zeta) d\omega_z^R(\zeta) = 0 \tag{$*$}$$

が なりたつ. ここで, $h(z) \wedge (1 - h(z))$ は $mom(h(z), 1 - h(z))$ の R 上の最大調和劣関数 (greatest harmonic minorant) を表す. $h(z) > 0$ でかつ, $h(z) \in HB(R) = HD(R)$ がわかる. したがって, h は $R^{*,R}$ 上への連続的拡張 h^* をもつ. $(*)$ によって,

$$0 = h(z) \wedge (1 - h(z)) = \int \min(h^*, 1 - h^*)(\zeta) d\omega_z^R(\zeta)$$

が なりたつ. Γ の各点が ディリクレ問題に関する正則点であり, Γ が 調和測度 ω_z^R に関する台であるので, h^* の連続性から, Γ 上, $\min(h^*, 1 - h^*) = 0$ が なりたち, $h^* = 0$ または 1 が なりたつ. $E_n = \{\zeta \in \Gamma : h^*(\zeta) = 1\}$ とおく. 再び, Γ の各点が ディリクレ問題に関する正則点であり, Γ が 調和測度 ω_z^R に関する台であるので, $E_n \subset Cl(\Gamma'_n)$ が わかる. したがって, $E_n (\neq \Gamma_n)$ は Γ_n の真部分集合になり, 開かつ閉集合である. これは Γ_n の連結性に矛盾する.

$\Gamma_n = \{\zeta_n\}$ ($\zeta_n \in \Gamma$) とし, $h_n(z) = \omega_z^R(\{\zeta_n\})$ とおく. このとき, $\sum_n h_n = 1$ となることに注意する. [1, Satz 16.1] および (i) によって, h_n は $HD(R)$ に関するミニマル関数である. (i) によって, h_n は $HB(R)$ に関するミニマル関数である. したがって, h_n は R 上, 有界であるので, h_n は $HP_+(R)$ に関するミニマル関数である.

したがって, [3] によって, ミニマルなマルチン境界点 ζ_n^M が 存在して, $h_n(z) = \omega_z^M(\{\zeta_n^M\})$ ($z \in R$) が なりたつ (cf. [1] を参照). $\sharp\{\zeta_n^M\}_{n=1}^{\infty} = \infty$ を仮定しよう. Δ^M が コンパクト距離空間であるので, $\zeta_0 (\in \Delta^M)$ と $\{\zeta_n^M\}_{n=1}^{\infty}$ の部分点列 $\{\zeta_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ が 存在して, $\lim_{l\to\infty} \zeta_{n_l} = \zeta_0$ をみたす.

$u_l(z) = \omega_z^M(\{\zeta_{n_j}^M\}_{j=l}^{\infty})$ ($z \in R$) とおく. $||u_l||^2$ を u_l のディリクレ積分を表すとする. $HB(R) = HD(R)$ であるので, $||u_l|| < +\infty$.

まず, $\{||u_l||\}_{l=1}^{\infty}$ が 有界であることを示す. $\{||u_l||\}_{l=1}^{\infty}$ が 非有界であると仮定する. [2, Theorem 9.2] によって,

$$\frac{1}{\pi}\|u_l\|^2 = \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{k=l}^{\infty}\theta_{z_0}(\zeta_{n_i}^M,\zeta_{n_k}^M)\omega_{z_0}^M(\{\zeta_{n_i}^M\})\omega_{z_0}^M(\{\zeta_{n_k}^M\}) + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq n_k}}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty}\theta_{z_0}(\zeta_m^M,\zeta_{n_k}^M)\omega_{z_0}^M(\{\zeta_m^M\})\omega_{z_0}^M(\{\zeta_{n_k}^M\}),$$

がなりたつ．ここで，$\theta_{z_0}(\zeta_{n_i}^M,\zeta_{n_{l_k}}^M)$ は Naïm 核 (cf. [4]) を表す．したがって，$\{\|u_l\|\}_{l=1}^{\infty}$ の部分列 $\{\|u_{l_\nu}\|\}_{\nu=1}^{\infty}$ が存在して，

$$(**)\quad \sum_{i=1}^{l_\nu-1}\sum_{k=l_\nu}^{l_{\nu+1}-1}\theta_{z_0}(\zeta_{n_i}^M,\zeta_{n_k}^M)\omega_{z_0}^M(\{\zeta_{n_i}^M\})\omega_{z_0}^M(\{\zeta_{n_k}^M\}) + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq n_k}}^{n_{l_{\nu+1}}}\sum_{k=l_\nu}^{l_{\nu+1}-1}\theta_{z_0}(\zeta_m^M,\zeta_{n_k}^M)\omega_{z_0}^M(\{\zeta_m^M\})\omega_{z_0}^M(\{\zeta_{n_k}^M\}) \geq \nu^5$$

がなりたつ．$u=\sum_{\nu=1}^{+\infty}u_{l_\nu}/\nu^2$ とおく．容易に，$u\in HB(R)$ がわかる．他方，(**) より，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\|u\|^2 &= \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\mu-1}\sum_{i=l_\mu}^{l_{\mu+1}-1}\sum_{k=l_\nu}^{l_{\nu+1}-1}\left(\sum_{j=\nu+1}^{\mu}\frac{1}{j^2}\right)^2\theta_{z_0}(\zeta_{n_i}^M,\zeta_{n_k}^M)\omega_{z_0}^M(\{\zeta_{n_i}^M\})\omega_{z_0}^M(\{\zeta_{n_k}^M\})\\
&\quad+\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n_l}}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{k=l_\mu}^{l_{\mu+1}-1}\left(\sum_{j=1}^{\mu}\frac{1}{j^2}\right)^2\theta_{z_0}(\zeta_m^M,\zeta_{n_k}^M)\omega_{z_0}^M(\{\zeta_m^M\})\omega_{z_0}^M(\{\zeta_{n_k}^M\})\\
&\geq \sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=0}^{\mu-1}\sum_{i=l_\mu}^{l_{\mu+1}-1}\sum_{k=l_\nu}^{l_{\nu+1}-1}\left(\sum_{j=\nu+1}^{\mu}\frac{1}{j^2}\right)^2\theta_{z_0}(\zeta_{n_i}^M,\zeta_{n_k}^M)\omega_{z_0}^M(\{\zeta_{n_i}^M\})\omega_{z_0}^M(\{\zeta_{n_k}^M\})\\
&\quad+\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n_l}}^{n_{l_{N+1}}}\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{k=l_\mu}^{l_{\mu+1}-1}\theta_{z_0}(\zeta_m^M,\zeta_{n_k}^M)\omega_{z_0}^M(\{\zeta_m^M\})\omega_{z_0}^M(\{\zeta_{n_k}^M\})\\
&\geq \frac{1}{N^4}\Big(\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=0}^{\mu-1}\sum_{i=l_\mu}^{l_{\mu+1}-1}\sum_{k=l_\nu}^{l_{\nu+1}-1}\theta_{z_0}(\zeta_{n_i}^M,\zeta_{n_k}^M)\omega_{z_0}^M(\{\zeta_{n_i}^M\})\omega_{z_0}^M(\{\zeta_{n_k}^M\})\\
&\quad+\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n_l}}^{n_{l_{N+1}}}\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{k=l_\mu}^{l_{\mu+1}-1}\theta_{z_0}(\zeta_m^M,\zeta_{n_k}^M)\omega_{z_0}^M(\{\zeta_m^M\})\omega_{z_0}^M(\{\zeta_{n_k}^M\})\Big)\\
&\geq \frac{1}{N^4}N^5 = N
\end{aligned}$$

が なりたつ (ただし, $l_0 = 1$ とする). したがって, $u \notin HD(R)$ となり, 矛盾が生じる.

u_l の定義より, $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ が R 上, 0 に広義一様収束する. よって, $\{\|u_l\|\}_{l=1}^{\infty}$ が 有界であるので, 任意の $v(\in \mathcal{D}(R))$ に対して,

$$(u_l, v) = \int_R \frac{\partial u_l}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u_l}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} dxdy \to 0 \ (l \to \infty)$$

が なりたつ.

マズル (Mazur) の定理 (cf. [6, Theorem 3(p.108)]) によって, ある $\{l\}_{l=1}^{\infty}$ の部分列 $\{l_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ と非負値数の集合 $\{\alpha_j^\nu\}_{j=1}^{l_\nu}$ が 存在して, $\sum_{j=1}^{l_\nu} \alpha_j^\nu = 1$ と $\|\sum_{j=1}^{l_\nu} \alpha_j^\nu u_j\| < \nu^{-2}$ が なりたつ.

$s = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{l_\nu} \alpha_j^\nu u_j$ とおく. このとき, 容易に, $s \in HD(R) \setminus HB(R)$ が なりたつ. これは 仮定 (i) に矛盾する. よって, $\sharp\{\zeta_n^M\} < \infty$ が なりたつ.

したがって, $N = \Delta_1^M \setminus \{\zeta \in \Delta_1^M : \omega_z^M(\zeta) > 0\}$ とおくと, $\omega_z^M(N) = 0, \sharp(\Delta_1^M \setminus N) < +\infty$, および $k_\zeta \in HB(R) \cap HD(R)$ $(\zeta \in \Delta_1^M \setminus N)$ が なりたつ. よって, (ii) が なりたつ.

(ii) を仮定する. 適当な調和測度に関する零集合 $N(\subset \Delta_1^M)$ がとれて, $\Delta_1^M \setminus N$ が有限集合であり, すべての $\zeta \in N$ に対して, ζ に極をもつマルチン関数 k_ζ が $HB(R) \cap HD(R)$ に属するとする. $\sharp(\Delta_1^M \setminus N) = m$ とおき, $\Delta_1^M \setminus N = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\}$ とおく. 任意に, $h(\in HB(R))$ をとる. マルチンの表現定理より, ある Δ^M 上の測度 μ が 存在して, $\mu(\Delta^M \setminus \Delta_1^M) = 0$ かつ

$$h(z) = \int_{\Delta_1^M} k_\zeta(z) d\mu(\zeta) = \Sigma_{j=1}^{n} k_{\zeta_j}(z)\mu(\{\zeta_j\})$$

をみたす. $k_{\zeta_j} \in HD(R)$ という事実によって, $h \in HD(R)$. よって, $HB(R) \subset HD(R)$ および $\dim HB(R) < +\infty$ が わかる. よって, $HB_+(R) \subset HD_+(R)$ が なりたち, $HD_+(R) \subset MHB_+(R)$ に注意すると, $HB_+(R) \subset HD_+(R) \subset MHB_+(R)$ が なりたつ. $\dim HB(R) < +\infty$ であるので, $HB_+(R) = MHB_+(R)$ が なりたつ. よって, $HB_+(R) = HD_+(R)$, すなわち, $HB(R) = HD(R)$ が なりたち, (iii) が なりたつ.

(iii) を仮定する. $\dim HB(R) < +\infty$ であるので, $HB_+(R) = MHB_+(R)$ に注意する. $HD_+(R) \subset MHB_+(R)$ であるので, $HD_+(R) \subset MHB_+(R) = HB_+(R)$. よって, $HD_+(R) \subset HB_+(R)$, すなわち, $HD(R) \subset HB(R)$ が なりたつ. $\dim HB(R) = \dim HD(R) < +\infty$ であるので, $HD(R) = HB(R)$. したがって, (i) が なりたつ.

文献

[1] C. Constantinescu and A. Cornea: *Ideale Ränder Riemanncher Flächen*, Springer, 1969.

[2] J. L. DOOB: *Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals*, Ann. Inst. Fourier, **12**(1962), 573–621.

[3] H. MASAOKA AND S. SEGAWA: *Hyperbolic Riemann surfaces without unbounded positive harmonic functions*, to appear.

[4] L. NAÏM: *Sur le rôle de la frontière de R.S. Martin dans la théorie du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, **7**(1957), 183–281.

[5] L. SARIO AND M. NAKAI: *Classification Theory of Riemann Surfaces*, Springer, 1970.

[6] K. YOSIDA: *Functional Analysis*, Springer, 1964.

Hiroaki Masaoka
Department of Mathematics
Faculty of Science
Kyoto Sangyo University
Kamigamo–Motoyama, Kitaku
Kyoto 603-8555
Japan
e-mail masaoka@cc.kyoto-su.ac.jp